

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
И.о. заведующего кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей



А.С. Рябенко

26.03.2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.ДВ.04.02 Дополнительные главы теории гармонических функций
Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика
2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление; математические модели в гидродинамике
3. Квалификация выпускника: Бакалавр
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
6. Составители программы: Ткачева С.А., канд. физ.-мат. наук, доцент
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета
Протокол № 0500-03 от 18.03.25

8. Учебный год: 2028/2029

Семестр: 8

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели учебной дисциплины: использование в профессиональной деятельности знаний из области учебной дисциплины «Дополнительные главы теории гармонических функций».

Задачи учебной дисциплины:

- приобретение знаний основных методов решения задач математической физики, описывающих стационарные процессы механической природы;
- применение теории гармонических функций при решении задач математической физики и исследовании уравнений с частными производными.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: блок (Б1), вариативная часть, дисциплина по выбору.

Для ее успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения с частными производными», «Метод Фурье».

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией функций комплексной переменной, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, знаниями теории интегралов Лебега, построения фундаментальных решений дифференциальных операторов.

Знание теории гармонических функций при исследовании решений уравнений эллиптического типа является базовым при построении математических моделей физических и механических процессов.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способность сбора, обработки, анализа и исследований в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ПК-1.1.	ПК-1.1. Выбирает и анализирует информацию с целью составления адекватной математической модели изучаемого объекта	<p>Знать: основные методы обработки, анализа и исследования в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики .</p> <p>Уметь: собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики.</p> <p>Владеть: опытом научно-исследовательской деятельности в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики</p>

			<p>ПК-1.2. Применяет классические методы исследования математических моделей в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики</p>	<p>Знать: основные методы обработки, анализа и исследования в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики .</p> <p>Уметь: собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики.</p> <p>Владеть: опытом научно-исследовательской деятельности в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики</p>
			<p>ПК-1.3. Использует методы исследования уравнений в частных производных и уравнений математической физики с целью анализа качественных свойств решений составленных математических моделей</p>	<p>Знать: основные методы обработки, анализа и исследования в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики .</p> <p>Уметь: собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики.</p> <p>Владеть: опытом научно-исследовательской деятельности в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и уравнений математической физики</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 2 / 72.

Форма промежуточной аттестации: зачет

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			8 семестр	
Контактная работа		24	24	
в том числе:	лекции	12	12	
	практические	12	12	
	лабораторные	-	-	
	курсовая работа	-	-	
	<i>контрольные работы</i>			
Самостоятельная работа		48	48	
Промежуточная аттестация		-	-	
Итого:		72	72	

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела. Гармонические функции. Первая и вторая формулы Грина. Теоремы о гармонических функциях.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
		Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина. Лемма об устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
1.2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	Функция Грина, формулы представления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью формулы Грина. Свойства функции Грина	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
		Формула Пуассона решения внутренней задачи Дирихле для шара. Неравенство Гарнака.	
1.3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	Решение задачи Дирихле, задачи Неймана и третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
		Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя. Физический смысл потенциалов. Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала	
		Поверхности Ляпунова. Определение и технические оценки. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
2. Практические занятия			
3.1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела. Постановка граничных задач. Интегральное представление функции с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа. Три свойства гармонических функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
		Основные краевые задачи для уравнения Лапласа, теоремы единственности решений краевых задач. Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина. Лемма об	

		устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.	
3.2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	Функция Грина. Внутренняя задача Дирихле для шара. Симметричность функции Грина внутренней задачи Дирихле. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара. Примеры построения функций Грина методом отражений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
3.3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	Основная формула теории гармонических функций. Решение задачи Дирихле, задачи Неймана и третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
		Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя. Объемный потенциал есть решение уравнения Пуассона $\Delta v(x_0) = -4\pi\rho(x_0)$.	
		Поверхности Ляпунова. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя. Нормальная производная потенциала простого слоя в случаях $x_0 \notin S$ и $x_0 \in S$. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	4	4		16	24
2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	4	4		16	24
3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	4	4		16	24
	Итого:	12	12		48	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции и практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 48 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Дополнительные главы теории гармонических функций» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-3 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем, для контроля самостоятельной работы обучающиеся сдают реферат по следующим темам:

1. Объемный потенциал.
2. Потенциал простого слоя
3. Потенциал двойного слоя
4. Физический смысл потенциалов.
5. Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала.
6. Поверхности Ляпунова. Определение и технические оценки.
7. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.
8. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.
9. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.
10. Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина.
11. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара.
12. Гармоническая функция на бесконечности.

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, подготовка к контрольной работе, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Выполнение домашних заданий направлено на отработку навыков использования средств и возможностей изучаемой дисциплины. При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения выполнения задания, проанализировать полученные результаты. При необходимости обучающиеся имеют возможность задать вопросы преподавателю и разрешить возникшие трудности

Практические занятия реализуются в соответствии с рабочим учебным планом при последовательном изучении дисциплины.

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения текущих и промежуточных аттестационных испытаний студенту рекомендуется:

- выполнять все виды работ, предусмотренных рабочим учебным планом по дисциплине;
- посещать аудиторные занятия;
- сдать тестовые задания (контрольную работу) по изученным темам.
- выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке и самостоятельной работе в аудитории.

Курс размещен в системе «Электронный университет» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076>), где содержится учебно-методический комплекс, содержащий весь лекционный материал курса, а также необходимые рекомендации к выполнению практических заданий.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Карчевский М. М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: Учебное пособие / М. М. Карчевский, М. Ф. Павлова. — 2-е изд, доп. — СПб. : Издательство «Лань», 2021. — 276 с. <URL: https://e.lanbook.com/reader/book/168915 >

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http://www.lib.vsu.ru/)
2	http://mschool.kubsu.ru – библиотека электронных учебных пособий. (http://mschool.kubsu.ru/ms/1.htm)
3	http://school.msu.ru – математический консультационный центр
4	Электронный курс (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076)

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Электронный курс: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076
2	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076>)

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Специализированная мебель.

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Учебная аудитория: специализированная мебель

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины

19. Фонд оценочных средств

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Реферат, проверочная работа, КИМ(зачет)
2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Реферат, проверочная работа, КИМ(зачет)
3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Реферат, проверочная работа, КИМ(зачет)
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				КИМ(зачет)

19.2. Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Оценка «зачтено» выставляется в случае: активная работа в ходе семестра, удовлетворительное написание тестовых заданий(проверочной работы) и написание реферата по одной из выбранных тем, или правильно и аргументированного ответа на вопросы КИМ, а также на дополнительный вопрос по программе курса	Базовый	Зачтено
Оценка «незачтено» выставляется студенту, если его знания не удовлетворяют вышеприведенным требованиям на оценку «зачтено».	-	Не зачтено

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Текущая аттестация проводится в форме выполнения контрольных заданий (проверочной работы) и написания реферата на одну из предложенных тем.

В ходе проверочной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем из пяти заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться любой литературой, ограничение по времени 45 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На проверочную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 90 минут

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено», которые формируются следующим образом:

выполнение проверочной работы – по баллу за каждую правильно решенную из 5 заданий проверочной работы. При получении не менее 3 баллов выставляется оценка «зачтено»;

написание реферата на одну из предложенных тем(см. ниже) определяется оценками «зачтено» и «незачтено», которые формируются следующим образом:

тема реферата соответствует содержанию, приводятся доказательства теорем, лемм, примеры, соответствующие теме реферата - оценка «зачтено»;

тема реферата не соответствует содержанию, нет примеров математических моделей, соответствующих данной теме - оценка «незачтено»

Проверочная работа

Вариант 1

1. Задача

$$\Delta u = f(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана); С)Третья краевая задача; D) нет правильного ответа;

2. Задача $\Delta u = f(x)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\partial \Omega} = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана); С)Третья краевая задача; D) нет правильного ответа

3. Формула $\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$

Варианты ответов:

А) Первая формула Грина; В) Вторая формула Грина; С) Третья формула Грина; D) нет правильного ответа

4. Задача $\Delta u = f(x)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

A) имеет единственное решение; B) не имеет единственного решения; C) решение задачи определяется с точностью до произвольной постоянной; D) нет правильного ответа.

5. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа ($n=2$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$)

имеет вид:

Варианты ответов:

A) $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$; B) $u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}$; C) $u(x, y, z) = \frac{1}{2r}$; D) $u(x, y, z) = \ln \frac{1}{r}$?

Привести доказательство правильности выбранного ответа.

Темы рефератов

1. Объемный потенциал.
2. Потенциал простого слоя
3. Потенциал двойного слоя
4. Физический смысл потенциалов.
5. Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала.
6. Поверхности Ляпунова. Определение и технические оценки.
7. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.
8. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.
9. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.
10. Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина.
11. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара.
12. Гармоническая функция на бесконечности.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Дополнительные главы теории гармонических функций» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце 8 семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачета учитываются результаты одной контрольной работы и подготовленный реферат на одну из предложенных тем. Для получения оценки «зачтено» в конце 8 семестра у обучающегося должны иметься оценки: «зачтено» по проверочной работе и оценка - «зачтено» по реферату, или студент должен ответить на соответствующие вопросы КИМ и дополнительный вопрос по программе курса в ходе проведения зачета.

Перечень вопросов к зачету:

№	Вопросы к промежуточной аттестации (зачет – 8 семестр)
01	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела.
02	Гармонические функции. определение
03	Первая и вторая формулы Грина.
04	Теоремы о гармонических функциях.
05	Преобразование Кельвина.
06	Лемма об устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.
07	Функция Грина, свойства функции Грина
08	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
09	Неравенство Гарнака
10	Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара.
11	Решение задачи Дирихле, для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
12	Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
13	Решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
14	Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
15	Физический смысл потенциалов.
16	Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала.
17	Поверхности Ляпунова. Определение.
18	Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.
19	Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.
20	Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.

Пример КИМ (зачет)**Контрольно-измерительный материал № 1**

1. Задача

$$\Delta u = f(x)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$$

Варианты ответов:

А) Первая краевая задача для уравнения Пуассона (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача для уравнения Пуассона (задача Неймана); С) Третья краевая задача для уравнения Пуассона; D) нет правильного ответа

2. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа ($n=3$,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

имеет вид

A) $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$; B) $u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}$; C) $u(x, y, z) = \frac{1}{2r}$; D) $u(x, y, z) = \ln \frac{1}{r}$?

3. Показать, что если функции u, v принадлежат $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, а функции Δu и Δv интегрируемы по Q то справедлива формула

$$\text{Грина } \int_Q (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial Q} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$